21/11/2017

Διαφορίσιμες Συναρτήσεις

<u>Ορισμός:</u> (Πυρήνας της Θεωρίας Συναρτήσεων περισσότερων μεταβλητών) Η $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό λέγεται

(α) <u>διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$</u>, αν υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε $\lim_{\eta \to \bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{\eta}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|} = \bar{0}$

$D = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

(β) διαφορίσιμη στο U, αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε $\nabla \in U$.

<u>Παρατηρήσεις</u> (α) Γραμμική απεικόνιση $D: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ αντιστοιχεί μοναδικά με έναν πίνακα $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$

δηλ. $D\bar{\eta} = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}}_{=\bar{\eta}}$

(β) $\boxed{m=1}$ (πραγματική συνάρτηση)

Η $f: U \to \mathbb{R}$ είναι <u>διαφορίσιμη</u> στο $\bar{x} \in U$

$:\Longleftrightarrow \exists\ D = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\eta \to \bar{0}} \frac{f(\bar{x}+\bar{\eta}) - f(\bar{x}) - D\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|} = 0$$

$\boxed{m=n=1}$ Η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$ ανοικτό, είναι

<u>διαφορίσιμη στο $x \in U$</u> $\circledast$ $\Longleftrightarrow \exists\ D \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{f(x+\eta) - f(x) - D\eta}{|\eta|} = 0.$$

$\circledast$ Στον Απ. Ι βλέπουμε ότι υπάρχει ένα μοναδικό τέτοιο $D \in \mathbb{R}$ (αν η f είναι διαφορίσιμη στο x) και αυτό ονομάζεται $f'(x) = D$ παράγωγος της f στο x.

Θεώρημα (1-SOS): Έστω η $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$

$U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$ (όπως στον ορισμό). Τότε:

(a) η $\bar{f}$ είναι συνεχής στο $\bar{x}$.

(β) η $\bar{f}$ είναι μερικώς διαφορίσιμη (partially differential) στο $\bar{x}$ και έχει μερικές παραγώγους $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x}) = d_{ji}$ $\forall j = 1, \dots, m$ $\forall i = 1, \dots, n$

($\Longrightarrow$ το $D = (d_{ji})_{\substack{j=1,\dots,m \\ i=1,\dots,n}} = J\bar{f}(\bar{x})$

το οποίο είναι μοναδικό, ονομάζεται παράγωγος της $\bar{f}$ στο $\bar{x}$.

Παρατήρηση: Το Θεώρημα λέει ότι αν η $\bar{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ τότε ο Ιακωβιανός Πίνακας υπάρχει και ονομάζεται (τότε) παράγωγος.

Απόδειξη

(a) $\bar{f}$ διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ $:\underset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, D \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\lim_{\bar{h} \to 0} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = \bar{0}$$

Θ.ν.δ.ο. $\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \underbrace{\left(\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x})\right)}$ $= 0$

$$= \|\bar{h}\| \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{h}}{\|\bar{h}\|} + D\bar{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \left(\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x})\right) \underset{\text{άθροισμα ορίων}}{=}$$

$$\underbrace{\left(\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \|\bar{h}\|\right)}_{=0} \underbrace{\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{h}}{\|\bar{h}\|}}_{=0} + \underbrace{\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} D\bar{h}}_{=0} \; (**)$$

$$(**)\quad \|D\bar{\eta}\|^2 = \sum_{j=1}^{m}\left((d_{j1}\dots d_{jm})\cdot\bar{\eta}\right)^2$$

$$D\bar{\eta} = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(d_{11},\dots,d_{1m})\cdot\bar{\eta}_1 \\ \vdots \\ (d_{m1}\dots d_{mn})\bar{\eta}_m\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|D\bar{\eta}\|^2 \le \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\|(d_{j1},\dots d_{jn})\|^2}_{=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} d_{ji}^2 \,=\, \|D\|^2}\cdot\|\bar{\eta}\|^2 \Rightarrow$$

$$\|D\bar{\eta}\| \le \|D\|\cdot\|\bar{\eta}\| \Rightarrow \lim_{\eta\to 0} D\bar{\eta} = 0.$$

Απόδειξη (β)

Έχουμε $D\in\mathbb{R}^{m\times n}$ με

$$\underbrace{\lim_{\bar{\eta}\to\bar{0}}\frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{\eta})-\bar{f}(\bar{x})-D\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|}=\bar{0}}$$

$$\Leftrightarrow \forall j=1,\dots,m$$

$$\lim_{\bar{\eta}\to\bar{0}}\frac{f_j(\bar{x}+\bar{\eta})-f_j(\bar{x})-(d_{j1},\dots,d_{jn})\cdot\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|}=\bar{0}$$

ορ. ορίου

$$\Leftrightarrow \forall j=1,\dots,m \quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta_0>0 \quad B(\bar{x},\delta_0)\subset U$$

και $\exists\ \delta<\delta_0 \quad \forall\bar{\eta}\in B(\bar{0},\delta)\setminus\{\bar{0}\}$:

$$\frac{f_j(\bar{x}+\bar{\eta})-f_j(\bar{x})-(d_{ji},\dots,d_{jm})\cdot\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|}<\varepsilon$$

$$\Longrightarrow [\forall j=1,\dots,m\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0]$$

→ ειδική περίπτωση των προηγούμενων $\bar{\eta}$

$\forall \bar{\eta}=h\bar{e}_i,\ h\in\mathbb{R},\ i=1,\dots,n\ \ [\bar{e}_i=(0,0,\dots,1,\dots,0)]$ ↑ i-θέση

Έχουμε $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall h\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$

$$\frac{|f_j(\bar{x}+h\bar{e}_i)-f_j(\bar{x})-d_{ji}h|}{|h|}<\varepsilon$$

$\Longleftrightarrow \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x}) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f_j(\bar{x}+h\bar{e_i}) - f_j(\bar{x})^{(h)}}{h} = d_{ji}$

$[\Longrightarrow]: \ \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall h\in(-\delta,\delta)\setminus\{0\}:$

$\dfrac{|f_j(\bar{x}+h\bar{e_i}) - f_j(\bar{x}) - d_{ji}h|}{|h|} < \varepsilon$

Για $g(h) = \underbrace{\dfrac{f_j(\bar{x}+h\bar{e_i}) - f_j(\bar{x}) - d_{ji}h}{h}}$ έχουμε

$\lim_{h\to 0} g(h) = 0 \qquad = \underbrace{\dfrac{f_j(\bar{x}+h\bar{e_i}) - f_j(\bar{x})}{h}}_{=(\ldots)} - d_{ji}$

$\Longleftrightarrow \lim_{h\to 0}(\ldots) - \lim_{h\to 0} d_{ji} = 0$

$\Longleftrightarrow \underbrace{\lim_{h\to 0}(\ldots)}_{"=" \ \frac{\partial f_i(\bar{x})}{\partial x_i}} = d_{ji}$

Παρατήρηση: Η διαφορισιμότητα μας λέει ότι με όποιο τρόπο και να κινηθούμε προς το $\bar{x}$, η συνάρτηση $\dfrac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - J\bar{f}(\bar{x})\cdot\bar{h}}{\|\bar{h}\|}$ συγκλίνει στο $\bar{0}$, ενώ η μερική διαφορισιμότητα μας λέει ότι η ίδια συνάρτηση συγκλίνει στο $\bar{0}$ αν κινηθούμε προς το $\bar{x}$ κατά μήκος των κατευθύνσεων $\bar{e_i}$ $i=1,\ldots,n$

Άρα αν το δει κανείς έτσι διαφορισιμότητα $\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$ μερική διαφορισιμότητα.

Θεώρημα (2-SOS): Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό μερικώς διαφορίσιμη και έστω ότι όλες οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}: U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $\bar{x}\in U$. Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x}$.

Απόδειξη

[Τεχνικό: U ανοικτό $\Rightarrow \exists\, \delta_0 > 0 : B(\bar{x}, \delta_0) \subset U$]

Έστω $\bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in B(\bar{0}, \delta_0) \setminus \{\bar{0}\}$

Τότε $\bar{y}_k = \bar{x} + \sum_{i=1}^{k} \eta_i \bar{e}_i \in B(\bar{x}_0, \delta_0) \subset U$

$$\Longrightarrow \|\bar{y}^{(k)} - \bar{x}\| = \|(\eta_1, \dots, \eta_k, 0, \dots, 0)\| \leq \|\bar{\eta}\| < \delta_0$$

Αφού $\bar{y}^{(k)} - \bar{y}^{(k-1)} = \underbrace{\eta_k}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\bar{e}_k}_{=(0, \dots, 1, \dots, 0)}$ $\forall k = 1, \dots, n$ $(\bar{y}^{(0)} = \bar{x})$

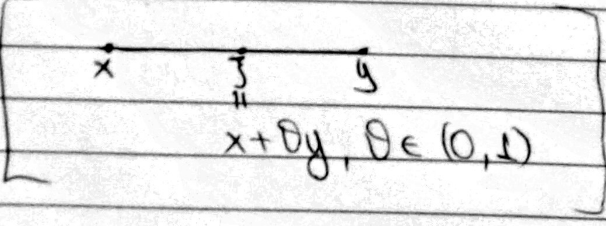
(1 στην i-θέση)

από το Θ.Μ.Τ. για πραγματικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής έχουμε $\exists\, \theta_k \in [0,1]$

$$f(\bar{y}^{(k)}) - f(\bar{y}^{(k-1)}) \overset{(*)}{=} \underbrace{f(\bar{y}^{(k-1)} + \eta_k \bar{e}_k)}_{=g(\eta_k)} - \underbrace{f(\bar{y}^{(k-1)})}_{=g(0)}$$

(η g είναι διαφορίσιμη λόγω του ότι $\exists\, \frac{\partial f}{\partial x_k}$ $U \to \mathbb{R}$)

$$(*)\quad \eta_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \theta_k \eta \cdot \bar{e}_k)$$



$$\Longrightarrow \underbrace{f(\bar{x} + \bar{\eta})}_{=\bar{y}^{(n)}} - f(\underbrace{\bar{x}}_{=\bar{y}^{(0)}}) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \theta_k \eta_k \bar{e}_k) \Longrightarrow$$

$$|f(\bar{x}+\bar{\eta}) - f(\bar{x}) - \underbrace{\operatorname{grad} f(\bar{x}) \bar{\eta}}_{= \sum_{k=1}^{n} \eta_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x})}| = \left| \sum_{k=1}^{n} \eta_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \theta_k \eta_k \bar{e}_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) \right) \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \|\bar{\eta}\| \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \theta_k \eta_k \bar{e}_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) \right|$$

Τέλος, οι συναρτήσεις $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ $U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $\bar{x}$ $\quad \forall k=1,\dots,n \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta\in(0,\delta_0)$

$\forall \bar{\eta}\in B(\bar{0},\delta)$

και αφού $\forall \bar{\eta} \in B(0,\delta)$ ισχύει

$$\underbrace{\|\bar{y}^{(k-1)}+\theta_k\eta_k\bar{e}_k-\bar{x}\|}_{=\|(\eta_1,\dots,\eta_{k-1},\theta_k\eta_k,0,\dots,0)\|\le\|\bar{\eta}\|} < \dots < \delta$$

Προκύπτει $\boxed{\dfrac{|f(\bar{x}+\bar{\eta})-f(\bar{x})-\operatorname{grad}f(\bar{x})\cdot\bar{\eta}|}{\|\bar{\eta}\|}<\varepsilon}$

$\boxed{\text{Ασκ. } 43/46/47}$